Первый день, ответы, указания и решения

7-8 классы

1. (все лиги) В выпуклом семиугольнике проведены некоторые диагонали так, что никакие три из них не образуют треугольник с вершинами в вершинах исходного семиугольника. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? Приведите пример и докажите, что никаким способом большего числа диагоналей провести нельзя.

   Ответ: 10 диагоналей. Оценка. Назовем диагональ короткой, если она отсекает треугольник от семиугольника. Остальные диагонали назовем длинными. Из каждой вершины выходит по 2 коротких и по две длинных диагонали. Если проведены все 14 диагоналей, получается 7 запрещенных треугольников.

   Заметим, что вычеркивание длинной диагонали разрушает один запрещенный треугольник, а короткой – два. Поэтому три вычеркивания испортят не более 6 треугольников, то есть нужно хотя бы 4 вычеркивания. Пример. Вычеркнем диагонали 1-3, 3-5, 4-6, 2-7.

2. (7-8, 7 – первая и вторая лиги, 8 – 1 лига) В 7А и 7Б поровну учеников. Оба класса написали контрольную. Проверив контрольные, учитель сказал, что он поставил двоек на 13 больше, чем остальных оценок. Не ошибся ли учитель? Ответ обосновать.

   Решение. Учитель ошибся. Если положительных оценок x, то всего выставлено $13+2x$, то есть нечетное число оценок, а контрольную писало четное число учеников.

3. (7 – первая и вторая лиги) Четырехугольник можно разделить диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Чему могут быть равны углы такого четырехугольника? Укажите все варианты

   Ответ: 1) 4 угла по 90 градусов, 2) 2 угла по 135 и 2 по 45 градусов, 3) два по 90 градусов, 135 градусов и 45 градусов.

4. (7 – все лиги, 7-8, 8-первая) На столе лежат четыре монеты. Их взвешивают на чашечных весах. Оказалось, что первая и вторая весят меньше, чем две другие; первая и третья равны по массе двум оставшимся, а первая и четвертая весят больше двух оставшихся. Какая монета самая тяжелая? Ответ обосновать.

   Решение. Пусть a,b,c,d – массы 1, 2, 3, 4 монет соответственно. По условию $a+b<c+d$, $a+c=b+d$. Отсюда $2a+b+c<b+c+2d$, $a<d$. Аналогично $a+d>b+c$, $b+d=a+c$. Тогда $a+b+2d>a+b+2c$, $d>c$.

   $a+b<c+d$, $b+c<a+d$, отсюда $a+c+2b<a+c+2d$, $b<d$. Значит, d – самая тяжелая.

5. (7, высшая, 8, высшая) Докажите, что если $n+1<k<2n$, то n различных прямых не могут разделить плоскость на k частей.

   (7-8, 8, первая) Докажите, что пять различных прямых не могут разделить плоскость на 8 частей.

   Решение. Если все прямые параллельны, то плоскость делится ими на $n + 1$ часть. Предположим, что есть две прямые, которые пересекаются друг с другом. Проведем сначала их, а затем остальные прямые будем проводить по одной. Каждая новая прямая пересекает по крайней мере одну из вначале проведенных прямых, поэтому новая прямая разбивается точками пересечения по крайней мере на два промежутка. Эти промежутки делят части, в которых они лежат, на две; количество частей увеличивается на столько же, на сколько частей разделена прямая точками пересечения с другими прямыми. Первые две прямые делят плоскость на 4 части, каждая новая прямая увеличивает количество частей как минимум на 2, поэтому n прямых делят плоскость как минимум на 2n частей.

6. (7, высшая, 8, высшая) Федор задумал число, делящееся на 300, и выписал на доске все его делители, кроме самого числа. Докажите, что сумма нечетных чисел, выписанных на доске, меньше суммы четных.

Решение. Заметим, что задуманное число делится на 300 и поэтому делится на 4. Если d – нечетный делитель данного числа, то 2d – также его делитель, причем отличный от самого числа, так как 2d не делится на 4. Поэтому сумма нечетных делителей даже как минимум вдвое меньше суммы четных.

7. (7 – высшая, 7-8, 8 – высшая) Несколько команд играли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой одну партию). В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех команд имеется хотя бы одна команда, которая успела сыграть с тремя другими командами. Доказать, что командам осталось сыграть не более трех игр.

Решение. Пусть A и B — две еще не сыгравшие команды, а C и D — две другие команды. Рассматривая четверку A, B, C, D, видим, что либо D, либо C сыграли с остальными тремя, в частности между собой. Таким образом, все пары, не содержащие ни A, ни B, уже играли. Если при этом найдется C, не игравшая с A или B, то любая другая команда D играла и с A, и с B. То есть все еще не состоявшиеся игры могут быть только между A, B и C, то есть их не более 3.

8. (7 класс, 1, 2 лиги, 7-8, 8 класс, 1 лига) Среди 20 внешне одинаковых монет, лежащих в ряд, есть фальшивые. На каждую монету наклеена бирка, на которой указано количество фальшивых среди следующих монет: монеты, на которую наклеена бирка, и ее соседей. Обязательно ли по числам на бирках всегда можно определить хотя бы одну фальшивую монету?

Ответ: нет. Предположим, что на всех бирках написаны единицы. Тогда фальшивыми могли оказаться как монеты с номерами 1, 4, 7, … 19 либо монеты с номерами 2, 5, 8, …, 20.

9. (все лиги) Сумма цифр натурального числа x равна n. Всегда ли между x и 10x можно найти натуральное число с суммой цифр n+5?

Ответ: Всегда. Пусть a – последняя цифра числа x. Если a<5, то возьмем число n+5, а если a>5, то возьмем число 10x-4. При умножении на 10 и вычитании 4 последняя цифра числа a уменьшается на 1 и справа приписывается 6, то есть сумма цифр увеличивается на 5.

10. (8 класс, высшая и первая лиги). В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

Указание. Рассмотрим середины двух других сторон и опустим из них перпендикуляры на основание. Эти середины и их проекции на основание – вершины квадрата. Разрежем треугольник по диагоналям этого квадрата.

11. (7 класс – все лиги, 8 класс – 2 лига) На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в шеренге чередуются. Известно, что ровно 52% учеников – девочки. Найдите количество мальчиков в классе.

Решение. Из условия следует, что мальчиков в классе меньше, чем девочек. Поскольку мальчики и девочки чередуются, девочек ровно на одну больше. Если x- количество мальчиков, получаем уравнение: x+1=0,52(2x+1), отсюда x=12.

12. (все лиги) Саша и Катя играют в следующую игру. У Саши есть 100 карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Саша выкладывает по две карточки на стол, а Катя забирает себе одну из них. В конце игры на столе остается 50 карточек. Если сумма чисел на них четна, выигрывает Саша, а если нечетна, то Катя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: Катя. Покажем, что Катя может забрать половину нечетных карточек. Поскольку нечетных карточек всего 50, она выиграет. Если Саша выкладывает карточки одной четности, Катя забирает любую. Из карточек, которые участвуют в таких ходах, Катя заберет ровно половину нечетных. Поскольку всего четных карточек 50, а в таких ходах участвует четное число четных карточек, остальные ходы Саши, т.е. в которых он выкладывает карточки разной четности (назовем такие ходы важными), будет четное число. Кате достаточно чередовать выбор четности карточек на важных ходах: в первый важный ход брать четную карточку, во второй нечетную, потом снова четную и т.д. Так как будет сделано четное число важных ходов, Катя заберет в них ровно половину всех нечетных карточек.

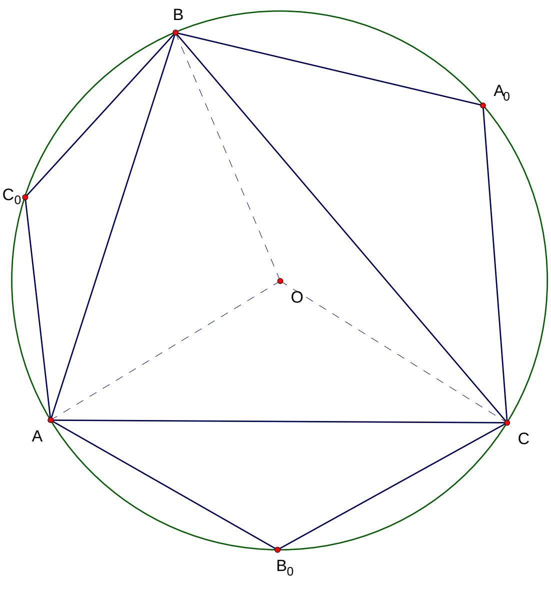
13. (8, высшая) Половина клеток квадрата 4 × 4 белые, половина — черные. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и черных клеток.

Решение. Разобьем квадрат на 4 квадрата 2 × 2. Если в каком-то из них белых и черных клеток поровну, то вычеркнем строки и столбцы, содержащие остальные три квадрата, и получим то, что требуется.

Предположим, что в каждом из квадратов 2 × 2 черных и белых клеток не поровну. Для определенности, пусть в одном из них не меньше трех черных клеток (обозначим его буквой А). Рассмотрим два соседних с ним квадрата (имеющие общую сторону). Если в обоих этих квадратах также не меньше 3 черных клеток, то всего черных клеток не меньше 3 × 3 = 9, то есть больше половины всех клеток, что противоречит условию. Поэтому хотя бы в одном их соседних квадратов не больше одной черной клетки (обозначим его буквой Б).

9 классы

Математический бой 1 (первый тур, высшая лига)



1. Пусть A_0- середина дуги описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A, аналогично строятся B_0, C_0. Докажите, что

площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна pR, где p - полупериметр, а R- радиус описанной окружности треугольника ABC. **Решение.** Площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна сумме площадей четырехугольников (дельтоидов) OBA_0C, OCB_0A, OAC_0B. Но $S_{OBA_0C}=\frac{aR}{2}, S_{OCB_0A}=\frac{bR}{2}, S_{OAC_0B}=\frac{cR}{2}$. Складывая указанные равенства, получаем утверждение задачи.

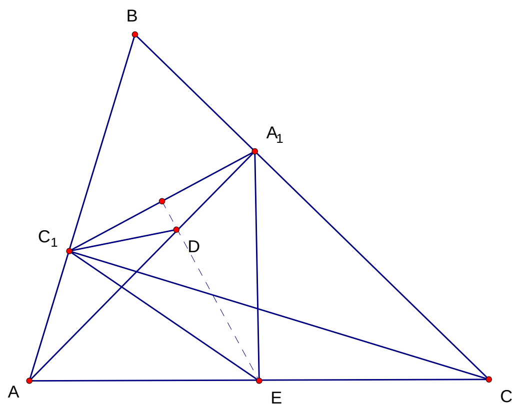
2. Можно ли на шахматной доске расположить несколько ферзей так, чтобы каждый ферзь бился ровно 4 другими (ферзи не прозрачны)? **Ответ**: Да.

	Ф	Ф	
Ф			Ф
Ф			Ф
	Ф	Ф	

3. Известно, что опытный эксперт проверяет каждый час одно и то же целое число работ ЕГЭ, не меньшее 6, причем это на две работы ЕГЭ больше, чем проверяет начинающий эксперт. На проверку принесли пачку работ. Опытному эксперту на проверку всех этих работ потребуется некоторое целое число часов, а двоим начинающим экспертам вместе на проверку этих же работ потребуется на 1 час меньше. Сколько работ принесли на проверку? **Ответ**. 24. **Решение**. Пусть число работ в пачке равно n и опытный эксперт проверяет за один час m работ. Задача сводится к решению уравнения $\frac{n}{m}-\frac{n}{2(m-2)}=1$, причем число $\frac{n}{m}=k$ - целое число. Отсюда $k-\frac{mk}{2(m-2)}=1$ или $(k-2)(m-4)=4$. Так как $m\geq 6$, то $m=6, k=4$, либо $m=8, k=3$. В обоих случаях $n=24$.

4. Найдите все положительные решения уравнения $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$. **Ответ**. $x=y=\sqrt{2}+1$. **Решение.** Так как $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ для положительных чисел a,b, то $x+\frac{2x+1}{x}\geq 2\sqrt{2x+1}$, причем равенство достигается при $x=\sqrt{2}+1$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D=C_1D$. Точка E - середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности. **Решение**. Из условия следует, что DE - серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Поэтому $\angle C_1AD=\frac{1}{2}\angle C_1EA_1=\angle C_1ED$. В итоге четырехугольник AC_1DE - вписанный.



6. Найти наименьшее значение выражения: $x^2y^2+(x-2)^2+(y-2)^2$ **Ответ**. 3. **Решение**.
$x^2y^2+(x-2)^2+(y-2)^2=(xy-1)^2+(x+y-2)^2+3\geq 3.$

7. Две клетки на шахматной доске (8×8) считаются соседними, если с одной можно перейти на другую за один или два горизонтальных (вертикальных) хода, или за один горизонтальный (вертикальный) и один диагональный ход. Найти максимальное количество клеток, которые могут быть выбраны на шахматной доске таким образом, что среди них нет двух соседних.

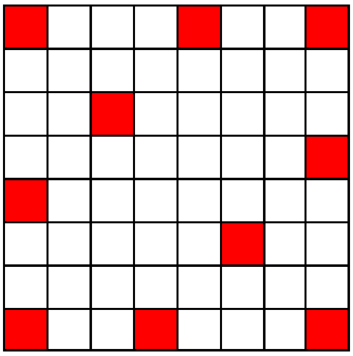


Рис.1

8	1	1	1	2	2	3	3	3
7	1	1	1	2	2	3	3	3
6	4	4	4	2	2	5	5	5
5	4	4	4	6	6	5	5	5
4	7	7	7	6	6	8	8	8
3	7	7	7	10	10	8	8	8
2	9	9	9	10	10	11	11	11
1	9	9	9	10	10	11	11	11
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

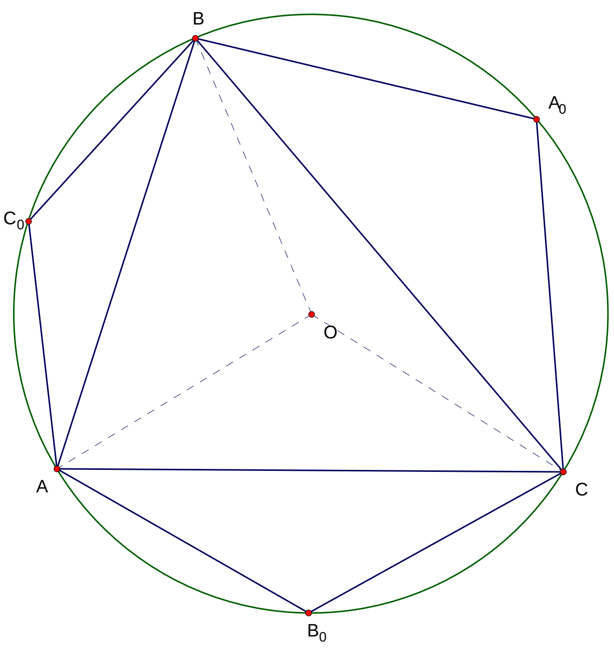
Рис.2

8	1	1	1	2	2	3	3	3
7	1	1				3	3	3
6	4						5	5
5	4						5	5
4	7						8	8
3	7	7				8	8	8
2	9	9	9	10	10	11	11	11
1	9	9	9	10	10	11	11	11
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Рис.3

Ответ. 10. **Решение**. Пример для 10 клеток показан на Рис.1. Чтобы показать, что 11 таких клеток найти невозможно, разделим доску на одиннадцать частей, как показано на Рис.2. Легко видеть, что любые две клетки из одной части будут соседними; таким образом, чтобы получить 11 клеток, которые не будут соседними, нужно выбрать ровно по одной клетке в каждой части. Из симметрии можно предположить, что одна из выбранных клеток - *d*5. Это исключает «белые» клетки на Рис.3. Далее, мы не можем взять *a*5, поскольку этот выбор устраняет все оставшиеся клетки в части «7»; поэтому мы должны взять *a*6; единственная доступная клетка в части «1» теперь *c*8; и это делает невозможным выбрать любую из клеток в части «2». Таким образом, невозможно выбрать 11 клеток, среди которых нет двух соседних.

8. В некоторой компании, состоящей из мужчин и женщин, каждый знаком хотя бы с одним лицом противоположного пола, но нет таких, кто был бы знаком со всеми лицами противоположного пола. Докажите, что можно выбрать двух мужчин M_1 и M_2, и двух женщин W_1 и W_2 так, что пары $(M_1;W_1)$ и $(M_2;W_2)$ – знакомы, а $(M_1;W_2)$ и $(M_2;W_1)$ – незнакомы. **Решение.** Пусть M_1 – мужчина, знакомый с наибольшим количеством женщин (если таких несколько, то выбираем любого из них). Далее, пусть W_2 – любая из женщин, которая незнакома с M_1 (из условия задачи, хотя бы одна такая женщина есть). Теперь, пусть M_2 – любой мужчина, который знаком с W_2. Задача будет решена, если среди знакомых M_1 найдется W_1, которая незнакома с M_2. Предположим обратное – пусть M_2 знаком со всеми знакомыми M_1. Так как M_2 знаком еще и с W_2 (с которой не знаком M_1), то он знаком с большим количеством женщин, чем M_1. Получаем противоречие с выбором M_1.



Математический бой 1 (первый тур, первая лига)

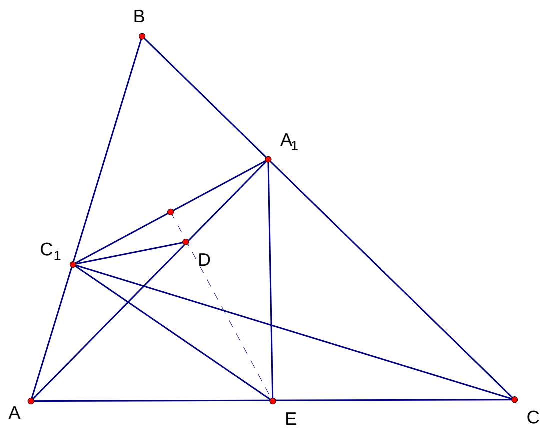
9. Пусть A_0 – середина дуги описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку A, аналогично строятся B_0, C_0. Докажите, что площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна pR, где p - полупериметр, а R- радиус описанной окружности треугольника ABC. **<u>Решение.</u>** Площадь шестиугольника $AC_0BA_0CB_0$ равна сумме площадей четырехугольников (дельтоидов) OBA_0C, OCB_0A, OAC_0B. Но $S_{OBA_0C} = \frac{aR}{2}, S_{OCB_0A} = \frac{bR}{2}, S_{OAC_0B} = \frac{cR}{2}$. Складывая указанные равенства, получаем утверждение задачи.

10. Можно ли на шахматной доске расположить несколько ферзей так, чтобы каждый ферзь бился ровно 4 другими (ферзи не прозрачны)? **<u>Ответ</u>**: Да.

	Ф	Ф	
Ф			Ф
Ф			Ф
	Ф	Ф	

11. Известно, что опытный эксперт проверяет каждый час одно и то же целое число работ ЕГЭ, не меньшее 6, причем это на две работы ЕГЭ больше, чем проверяет начинающий эксперт. На проверку принесли пачку работ. Опытному эксперту на проверку всех этих работ потребуется некоторое целое число часов, а двоим начинающим экспертам вместе на проверку этих же работ потребуется на 1 час меньше. Сколько работ принесли на проверку? **<u>Ответ</u>**. 24. **<u>Решение</u>**. Пусть число работ в пачке равно n и опытный эксперт проверяет за один час m работ. Задача сводится к решению уравнения $\frac{n}{m} - \frac{n}{2(m-2)} = 1$, причем число $\frac{n}{m} = k$ - целое число. Отсюда $k - \frac{mk}{2(m-2)} = 1$ или $(k-2)(m-4) = 4$. Так как $m \geq 6$, то $m = 6, k = 4$, либо $m = 8, k = 3$. В обоих случаях $n = 24$.

12. Найдите все положительные решения уравнения $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$. **<u>Ответ</u>**. $x = y = \sqrt{2} + 1$. **<u>Решение.</u>** Так как $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ для положительных чисел a, b, то $x + \frac{2x+1}{x} \geq 2\sqrt{2x+1}$, причем равенство достигается при $x = \sqrt{2} + 1$.



13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E - середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности. **<u>Решение</u>**. Из условия следует, что DE - серединный

перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Поэтому $\angle C_1AD = \frac{1}{2}\angle C_1EA_1 = \angle C_1ED$. В итоге четырехугольник AC_1DE - вписанный.

14. Найти наименьшее значение выражения: $x^2y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2$. **Ответ**. 3. **Решение**. $x^2y^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = (xy-1)^2 + (x+y-2)^2 + 3 \geq 3$.

15. Известно, что a, b и c - целые положительные числа, и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2$ - точный квадрат. (Точный квадрат – это квадрат некоторого натурального числа). **Решение**. $a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+\frac{(ab)^2}{(a+b)^2} =$

$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2+2ab)+(ab)^2}{(a+b)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)ab+(ab)^2}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{(a^2+ab+b^2)^2}{(a+b)^2} = \left(\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}\right)^2 = (a+b-c)^2.$$

Бассейн наполняют водой две трубы. После наполнения половины бассейна, скорость заполнения одной трубой увеличилась на 10%, другой – на 20%. В результате, вторая половина бассейна была наполнена на 2 часа быстрее, чем первая. Может ли бассейн быть полностью заполнен не более, чем за 21 час? **Ответ**. Нет. **Решение**. Обозначим через t – время, за которое была заполнена первая половина бассейна, T - время, за которое был заполнен весь бассейн, x и y – скорости заполнения бассейна первой и второй трубой. Тогда из условия задачи $(x + y)t = (1{,}1x + 1{,}2y)(t - 2)$. Выразим t: $t = \frac{2(1{,}1x+1{,}2y)}{0{,}1x+0{,}2y}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на y, и обозначим $z = x/y$, отсюда $t = \frac{2{,}2z+2{,}4}{0{,}1z+0{,}2}$ (очевидно, что $z > 0$). После тождественного преобразования дроби, получаем: $t = 22 - \frac{20}{z+2}$, отсюда $12 < t < 22$ (при $z > 0$). Так как $T = 2t - 2$, то $22 < T < 42$

10-11 классы

Высшая лига

1. Докажите неравенство $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3$ для положительных чисел.

Ясно, $(x^5+y^5)-(x^3y^2+x^2y^3) = (x^3-y^3)(x^2-y^2)$ – сомножители в правой части одного знака.

2. На плоскости требуется разместить n белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любом отрезке, соединяющем две белые точки, находилась хотя бы одна черная точка. Какое минимальное количество черных точек необходимо для этого?

Ответ: $n-1$. *Пример*. Расположим все белые точки на одной прямой, а черные последовательно между белыми. *Оценка*. Пусть на плоскости имеются точки, удовлетворяющие условию. Проведем прямую, которая не является перпендикулярной ни одному из отрезков, соединяющему две белые точки. Теперь ортогонально спроектируем все точки на построенную прямую. Никакие две белые точки не проектируются в одну точку.

3. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски 8×8, называется *несбалансированным*, если он имеет различное число белых и черных клеток. Сколько несбалансированных прямоугольников на шахматной доске?

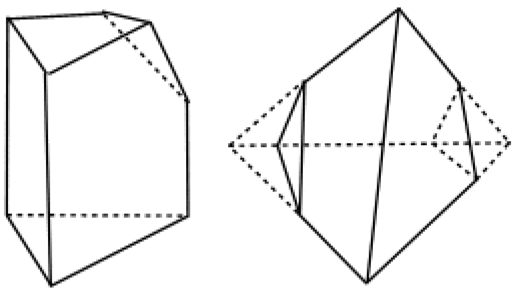
Ответ: 400. Если хотя бы одна сторона прямоугольника четная, то прямоугольник сбалансированный. Значит, у *несбалансированного* прямоугольника обе стороны – нечетные. Всего есть 8 способов выбрать прямоугольник высотой в одну клетку, 6 способов выбрать высотой в три, 4 способа выбрать высотой в пять и 2 способа, чтобы выбрать высотой в семь. Всего $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ возможных вариантов нечетной высотой. Аналогично, 20 возможных вариантов нечетной шириной, следовательно, на всего $20 \cdot 20 = 400$ прямоугольников со сторонами нечетной длины.

4. Для любой пары чисел определена некоторая операция *, удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$. Решите уравнение: $x*3=673$.

Ответ: 2019. Во-первых, $x*1=x*\left(x*x\right)=\left(x*x\right)\cdot x=1\cdot x=x$.

Во-вторых, $\left(x*3\right)\cdot 3=673\cdot 3=2019$, $\left(x*3\right)\cdot 3=x*\left(3*3\right)=x*1=x$.

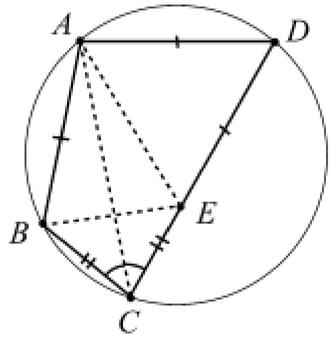
5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 6 граней, 8 вершин и 12 ребер, при этом имеются четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро?



Ответ: да, существует. На рисунках два примера. В первом – от треугольной призмы плоскостью отсечена вершина. На втором – от тетраэдра двумя плоскостями отсечены две вершины. Проверка осуществляется непосредственно. China girls mathematical olimpiad.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, при этом $AB = AD$ и $AB + BC = CD$.

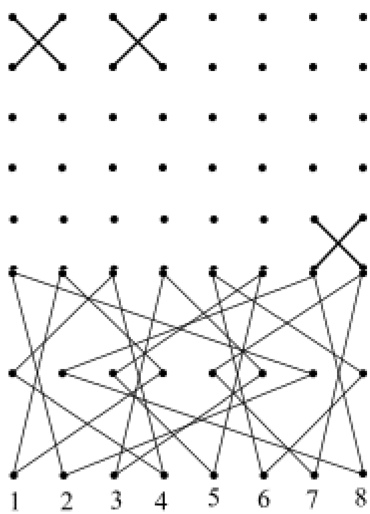
Найдите величину угла $\angle CDA$.



Ответ: 60°. Отложим на DC отрезок DE, равный AB. Из условия следует, что $CE = CB$. Кроме того, углы BCA и DCA равны, поскольку равны дуги AB и AD. Для угла C равнобедренного треугольника BCE отрезок CA содержит его биссектрису, значит, является серединным перпендикуляром к BE. Это, в свою очередь, означает, что $AB = AE$, треугольник ADE – равносторонний, а $\angle CDA = 60°$. Nordic Mathematical Contest.

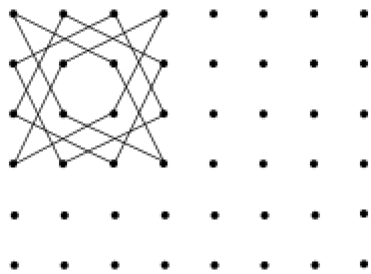
7. Имеются 48 камней. На первом шаге их раскладывают в 24 кучи по 2 камня, на втором – в 16 куч по 3 камня, на третьем в 12 куч по 4 камня и так далее. После каждого шага должно выполняться требование: никакие два камня не встретились в куче более одного раза. Какое максимальное количество шагов можно сделать?

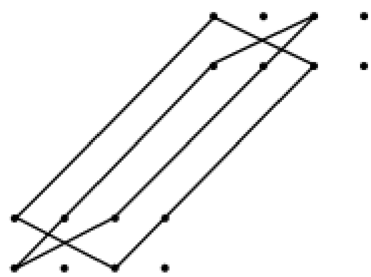
Ответ: 5 шагов. *Оценка*. Допустим, что удалось разложить по 2, 3, 4, 6, 8, 12. Количество куч по 12 камней равно 4. Рассмотрим 6 камней ранее попавшие в одну кучу на 4 шаге. Ясно, что какие-то два камня попадут в одну из четырех куч по 12 камней. Значит, шагов не более чем 5.



Пример. Расположим камни в виде прямоугольника 6 × 8. В каждой строке 8 камней, в столбце 6 камней. Будем считать, что строка куча из 8 камней, столбец – куча из 6 камней. Ясно, что эти два комплекта удовлетворяют требованиям. Дальнейшее формирование куч будет из разных линий. Сформируем кучи по два камня как показано на рисунке. Отметим

свойство 1. Если 2 камня находятся в одной куче из двух камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{2}$. Покажем, как будем разбивать на кучи по три камня. Используем строки первую, третью и пятую сверху построим треугольники как показано на рисунке. Внизу указаны номера треугольников. Отметим, что по построению треугольники с номерами 1, 3, 4, 5, 6, 7 равны по трем сторонам, а их длины сторон равны $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$. Треугольники с номерами 2 и 8 также равны их длины сторон $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{53}$. Сделав параллельный перенос на клетку вниз получим второй комплект из 8 треугольников. *Свойство* 2. Если 2 камня находятся в одной куче из трех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$ или $\sqrt{53}$.





Кучи по 4 камня. В левом углу 4×4 построим два ромба с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ отметим, что точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч и два – квадрата с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$. Такой же комплект построим в левом нижнем углу 4×4. Наконец, рассмотрим оставшиеся16 точек. Их нетрудно разбить по 4 так, чтобы они стали вершинами параллелограммов. *Свойство* 3. Если 2 камня находятся в одной куче из четырех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ при этом точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч. Итак, никакая пара точек не была в разных кучах.

8. Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени такой, что 1) $P(x)$ имеет целые коэффициенты; 2) каждый корень многочлена $P(x)$ является целым числом; 3) $P(0) = -1$; 4) $P(3) = 128$.

Ответ: $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Обозначим $a_1, a_2, \ldots a_m$ – корни многочлена $P(x)$, n – степень $P(x)$. Тогда $P(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{n_m}$, здесь a и $a_1, a_2, \ldots a_m$ – целые числа. По условию $P(0) = -1$, $a\cdot a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{n_m} = -1$ и числа a и $a_1, a_2, \ldots a_m$ – равны ±1. В свою очередь, многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = (x-1)^{2p+1}(x+1)^{n-(2p+1)}$. Рассмотрим $P(3) = 2^{2p+1}4^{n-(2p+1)} = 2^{2n-1-2p}$, $128=2^7$, $2n = 8+2p$. Значит, $n \le 4$, при этом равенство достигается, если $n = 4$, $p = 0$, $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Nordic mathematical contest.

1 лига

1. Докажите неравенство $x^5 + y^5 \ge x^3y^2 + x^2y^3$ для положительных чисел.

Ясно, $\left(x^5+y^5\right)-\left(x^3y^2+x^2y^3\right)=\left(x^3-y^3\right)\left(x^2-y^2\right)$ – сомножители в правой части одного знака.

2. На плоскости требуется разместить *n* белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любом отрезке, соединяющем две белые точки, находилась хотя бы одна черная точка. Какое минимальное количество черных точек необходимо для этого?

Ответ: *n* – 1. *Пример*. Расположим все белые точки на одной прямой, а черные последовательно между белыми. *Оценка*. Пусть на плоскости имеются точки, удовлетворяющие условию. Проведем прямую, которая не является перпендикулярной ни одному из отрезков, соединяющему две белые точки. Теперь ортогонально спроектируем все точки на построенную прямую. Никакие две белые точки не проектируются в одну точку.

3. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски 8×8, называется *несбалансированным*, если он имеет различное число белых и черных клеток. Сколько несбалансированных прямоугольников на шахматной доске?

Ответ: 400. Если хотя бы одна сторона прямоугольника четная, то прямоугольник сбалансированный. Значит, у *несбалансированного* прямоугольника обе стороны – нечетные. Всего есть 8 способов выбрать прямоугольник высотой в одну клетку, 6 способов выбрать высотой в три, 4 способа выбрать высотой в пять и 2 способа, чтобы выбрать высотой в семь. Всего 8 + 6 + 4 + 2 = 20 возможных вариантов нечетной высотой. Аналогично, 20 возможных вариантов нечетной шириной, следовательно, на

всего 20 · 20 = 400 прямоугольников со сторонами нечетной длины.

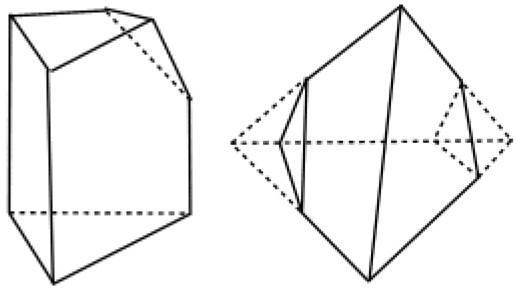
4. Для любой пары чисел определена некоторая операция *, удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$. Решите уравнение: $x*3=673$.

Ответ: 2019. Во-первых, $x*1=x*\left(x*x\right)=\left(x*x\right)\cdot x=1\cdot x=x$.

Во-вторых, $\left(x*3\right)\cdot 3=673\cdot 3=2019$, $\left(x*3\right)\cdot 3=x*\left(3*3\right)=x*1=x$.

5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 6 граней, 8 вершин и 12 ребер, при этом имеются четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро?

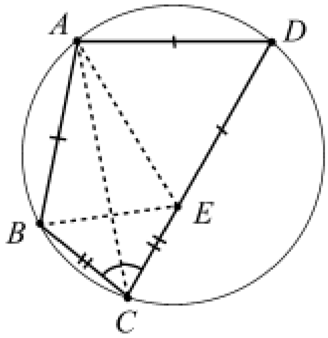
Ответ: да, существует. На рисунках два примера. В первом – от треугольной призмы плоскостью отсечена вершина. На втором – от тетраэдра двумя плоскостями отсечены две вершины. Проверка осуществляется непосредственно. China girls mathematical olimpiad.



6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, при этом $AB = AD$ и $AB + BC = CD$.

Найдите величину угла $\angle CDA$.

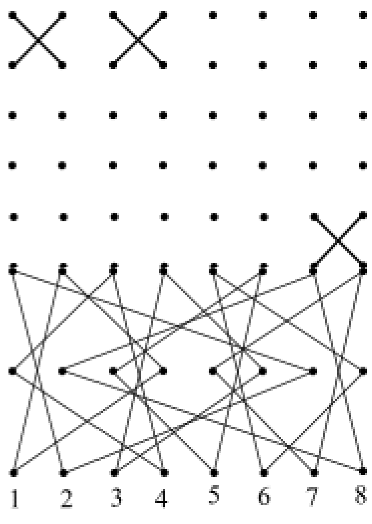
Ответ: 60°. Отложим на DC отрезок DE, равный AB. Из условия следует, что $CE = CB$. Кроме того, углы BCA и DCA равны, поскольку равны дуги AB и AD. Для угла C равнобедренного треугольника BCE отрезок CA содержит его биссектрису, значит, является серединным перпендикуляром к BE. Это, в свою очередь, означает, что $AB = AE$, треугольник ADE – равносторонний, а $\angle CDA = 60°$. Nordic Mathematical Contest.



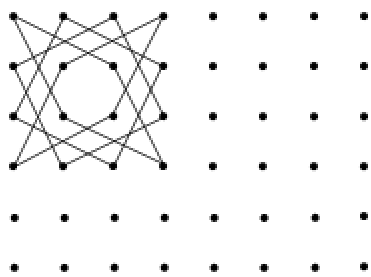
7. Имеются 48 камней. На первом шаге их раскладывают в 24 кучи по 2 камня, на втором – в 16 куч по 3 камня, на третьем в 12 куч по 4 камня и так далее. После каждого шага должно выполняться требование: никакие два камня не встретились в куче более одного раза. Какое максимальное количество шагов можно сделать?

Ответ: 5 шагов. *Оценка*. Допустим, что удалось разложить по 2, 3, 4, 6, 8, 12. Количество куч по 12 камней равно 4. Рассмотрим 6 камней ранее попавшие в одну кучу на 4 шаге. Ясно, что какие-то два камня попадут в одну из четырех куч по 12 камней. Значит, шагов не более чем 5.

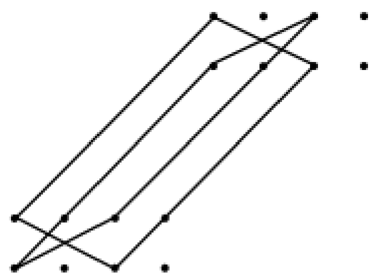
Пример. Расположим камни в виде прямоугольника 6 × 8. В каждой строке 8 камней, в столбце 6 камней. Будем считать, что строка куча из 8 камней, столбец – куча из 6 камней. Ясно, что эти два комплекта удовлетворяют требованиям. Дальнейшее формирование куч будет из разных линий. Сформируем кучи по два камня как показано на рисунке. Отметим



свойство 1. Если 2 камня находятся в одной куче из двух камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{2}$. Покажем, как будем разбивать на кучи по три камня. Используем строки первую, третью и пятую сверху построим треугольники как показано на рисунке. Внизу указаны номера треугольников. Отметим, что по построению треугольники с номерами 1, 3, 4, 5, 6, 7 равны по трем сторонам, а их длины сторон равны $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$. Треугольники с номерами 2 и 8 также равны их длины сторон $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{53}$. Сделав параллельный перенос на клетку вниз получим второй комплект из 8 треугольников. *Свойство* 2. Если 2 камня находятся в одной куче из трех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$ или $\sqrt{53}$.



Кучи по 4 камня. В левом углу 4×4 построим два ромба с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ отметим, что точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч и два – квадрата с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$. Такой же комплект построим в левом нижнем углу 4×4. Наконец, рассмотрим оставшиеся16 точек. Их нетрудно разбить по 4 так, чтобы они стали вершинами параллелограммов. *Свойство* 3. Если 2 камня находятся в одной куче из четырех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ при этом точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч. Итак, никакая пара точек не была в разных кучах.



8. Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени такой, что 1) $P(x)$ имеет целые коэффициенты; 2) каждый корень многочлена $P(x)$ является целым числом; 3) $P(0) = -1$; 4) $P(3) = 128$.

Ответ: $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Обозначим $a_1, a_2, \dots a_m$ – корни многочлена $P(x)$, n – степень $P(x)$. Тогда $P(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{n_m}$, здесь a и $a_1, a_2, \dots a_m$ – целые числа. По условию $P(0) = -1$, $a\cdot a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{n_m} = -1$ и числа a и $a_1, a_2, \dots a_m$ – равны ±1. В свою очередь, многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = (x-1)^{2p+1}(x+1)^{n-(2p+1)}$. Рассмотрим $P(3) = 2^{2p+1}4^{n-(2p+1)} = 2^{2n-1-2p}$, $128=2^7$, $2n = 8+2p$. Значит, $n \le 4$, при этом равенство достигается, если $n = 4$, $p = 0$, $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Nordic mathematical contest.

2 лига

1. Докажите неравенство $x^5 + y^5 \ge x^3y^2 + x^2y^3$ для положительных чисел.

Ясно, $\left(x^5+y^5\right)-\left(x^3y^2+x^2y^3\right)=\left(x^3-y^3\right)\left(x^2-y^2\right)$ – сомножители в правой части одного знака.

2. На плоскости требуется разместить n белых точек и наименьшее возможное число черных точек так, чтобы на любом отрезке, соединяющем две белые точки, находилась хотя бы одна черная точка. Какое минимальное количество черных точек необходимо для этого?

Ответ: $n-1$. *Пример*. Расположим все белые точки на одной прямой, а черные последовательно между белыми. *Оценка*. Пусть на плоскости имеются точки, удовлетворяющие условию. Проведем прямую, которая не является перпендикулярной ни одному из отрезков, соединяющему две белые точки. Теперь ортогонально спроектируем все точки на построенную прямую. Никакие две белые точки не проектируются в одну точку.

3. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски 8×8, называется *несбалансированным*, если он имеет различное число белых и черных клеток. Сколько несбалансированных прямоугольников на шахматной доске?

Ответ: 400. Если хотя бы одна сторона прямоугольника четная, то прямоугольник сбалансированный. Значит, у *несбалансированного* прямоугольника обе стороны – нечетные. Всего есть 8 способов выбрать прямоугольник высотой в одну клетку, 6 способов выбрать высотой в три, 4 способа выбрать высотой в пять и 2 способа, чтобы выбрать высотой в семь. Всего $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ возможных вариантов нечетной высотой. Аналогично, 20 возможных вариантов нечетной шириной, следовательно, на

всего $20 \cdot 20 = 400$ прямоугольников со сторонами нечетной длины.

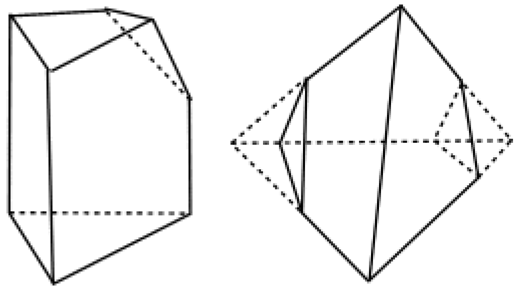
4. Для любой пары чисел определена некоторая операция *, удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$. Решите уравнение: $x*3=673$.

Ответ: 2019. Во-первых, $x*1=x*\left(x*x\right)=\left(x*x\right)\cdot x=1\cdot x=x$.

Во-вторых, $\left(x*3\right)\cdot 3=673\cdot 3=2019$, $\left(x*3\right)\cdot 3=x*\left(3*3\right)=x*1=x$.

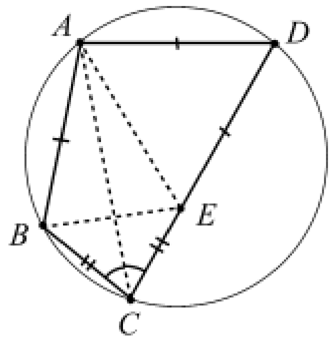
5. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 6 граней, 8 вершин и 12 ребер, при этом имеются четыре грани, каждая пара из которых имеет общее ребро?

Ответ: да, существует. На рисунках два примера. В первом – от треугольной призмы плоскостью отсечена вершина. На втором – от тетраэдра двумя плоскостями отсечены две вершины. Проверка осуществляется непосредственно. China girls mathematical olimpiad.



6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, при этом $AB = AD$ и $AB + BC = CD$. Найдите величину угла $\angle CDA$.

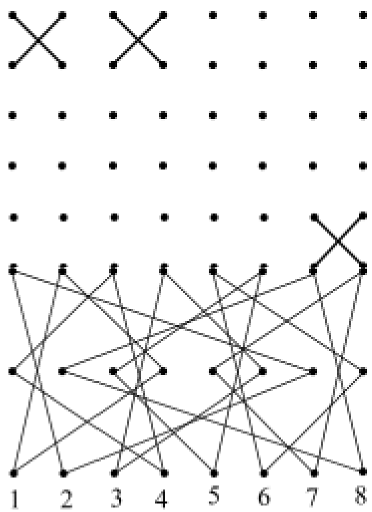
Ответ: 60°. Отложим на DC отрезок DE, равный AB. Из условия следует, что $CE = CB$. Кроме того, углы BCA и DCA равны, поскольку равны дуги AB и AD. Для угла C равнобедренного треугольника BCE отрезок CA содержит его биссектрису, значит, является серединным перпендикуляром к BE. Это, в свою очередь, означает, что $AB = AE$, треугольник ADE – равносторонний, а $\angle CDA = 60°$. Nordic Mathematical Contest.



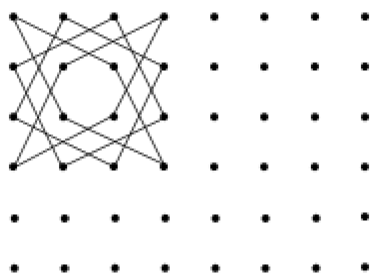
7. Имеются 48 камней. На первом шаге их раскладывают в 24 кучи по 2 камня, на втором – в 16 куч по 3 камня, на третьем в 12 куч по 4 камня и так далее. После каждого шага должно выполняться требование: никакие два камня не встретились в куче более одного раза. Какое максимальное количество шагов можно сделать?

Ответ: 5 шагов. *Оценка*. Допустим, что удалось разложить по 2, 3, 4, 6, 8, 12. Количество куч по 12 камней равно 4. Рассмотрим 6 камней ранее попавшие в одну кучу на 4 шаге. Ясно, что какие-то два камня попадут в одну из четырех куч по 12 камней. Значит, шагов не более чем 5.

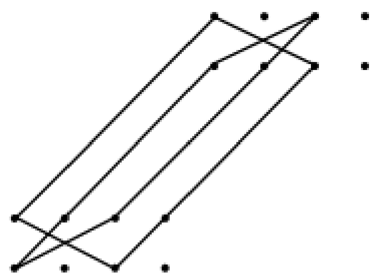
Пример. Расположим камни в виде прямоугольника 6 × 8. В каждой строке 8 камней, в столбце 6 камней. Будем считать, что строка куча из 8 камней, столбец – куча из 6 камней. Ясно, что эти два комплекта удовлетворяют требованиям. Дальнейшее формирование куч будет из разных линий. Сформируем кучи по два камня как показано на рисунке. Отметим



свойство 1. Если 2 камня находятся в одной куче из двух камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{2}$. Покажем, как будем разбивать на кучи по три камня. Используем строки первую, третью и пятую сверху построим треугольники как показано на рисунке. Внизу указаны номера треугольников. Отметим, что по построению треугольники с номерами 1, 3, 4, 5, 6, 7 равны по трем сторонам, а их длины сторон равны $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$. Треугольники с номерами 2 и 8 также равны их длины сторон $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{53}$. Сделав параллельный перенос на клетку вниз получим второй комплект из 8 треугольников. *Свойство* 2. Если 2 камня находятся в одной куче из трех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$ или $\sqrt{53}$.



Кучи по 4 камня. В левом углу 4×4 построим два ромба с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ отметим, что точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч и два – квадрата с длиной стороны $\sqrt{5}$, диагоналями $\sqrt{10}$. Такой же комплект построим в левом нижнем углу 4×4. Наконец, рассмотрим оставшиеся16 точек. Их нетрудно разбить по 4 так, чтобы они стали вершинами параллелограммов. *Свойство* 3. Если 2 камня находятся в одной куче из четырех камней, то расстояние между ними равно $\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{2}$ при этом точки, между которыми расстояния $\sqrt{2}$, не попадали в одну пару среди 24 куч. Итак, никакая пара точек не была в разных кучах.



8. Найдите многочлен $P(x)$ наименьшей степени такой, что 1) $P(x)$ имеет целые коэффициенты; 2) каждый корень многочлена $P(x)$ является целым числом; 3) $P(0) = -1$; 4) $P(3) = 128$.

Ответ: $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Обозначим $a_1, a_2, \dots a_m$ – корни многочлена $P(x)$, n – степень $P(x)$. Тогда $P(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{n_m}$, здесь a и $a_1, a_2, \dots a_m$ – целые числа. По условию $P(0) = -1$, $a\cdot a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{n_m} = -1$ и числа a и $a_1, a_2, \dots a_m$ – равны ±1. В свою очередь, многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = (x-1)^{2p+1}(x+1)^{n-(2p+1)}$. Рассмотрим $P(3) = 2^{2p+1}4^{n-(2p+1)} = 2^{2n-1-2p}$, $128=2^7$, $2n = 8+2p$. Значит, $n \le 4$, при этом равенство достигается, если $n = 4$, $p = 0$, $P(x) = (x - 1)\cdot(x + 1)^3$. Nordic mathematical contest.